Алгебра 8

Шарафатдинов Камиль БПМИ192

билд `2020-06-29 22:32+0300`

$\boxed{1}$

$$f = x^5 + x^3 + x, \quad g = x^4 + x + 1$$

$$\begin{aligned}(f, g) = (x^5 + x^3 + x, \quad x^4 + x + 1) = \\ (x^3 - x^2, \quad x^4 + x + 1) = \\ (x^3 - x^2, \quad x^2 + x + 1) = \\ (-2x^2 - x, \quad x^2 + x + 1) = \\ (-x, \quad x^2 + x + 1) = \\ (x, \quad x^2 + x + 1) = 1\end{aligned}$$

$\boxed{2}$

Так как $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3$, то мы можем записать так:

$$\frac{1 - \sqrt[3]{3}}{1 + \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9}} = a + b\sqrt[3]{3} + c\sqrt[3]{9}$$

и умножить на знаменатель обе части ($\alpha = \sqrt[3]{3}$:

$$1 - \alpha = (a + b\alpha + c\alpha^2)(1 + \alpha - \alpha^2) = a - b + c + \alpha(a + b - c) + \alpha^2(b + c - a)$$

Получаем СЛУ

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Решаем, получаем

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ b &= -\frac{1}{2} \\ c &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\frac{1 - \sqrt[3]{3}}{1 + \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9}} = -\frac{\sqrt[3]{3}}{2} + \frac{\sqrt[3]{9}}{2}$$

$\boxed{3}$

Аналогично семинарской задаче:

$$\mathbb{Q}(\sqrt{3}+\sqrt{5}) = \mathbb{Q}(\sqrt{3})(\sqrt{5})$$

Степень расширения равна $2 \cdot 2 = 4$.
Поэтому по теореме с лекции минимальный многочлен степени 4.

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{3}+\sqrt{5} \\ x^2 &= 8 + 2\sqrt{15} \\ (x^2-8)^2 &= 60 \\ x^4 - 16x^2 + 4 &= 0 \end{aligned}$$

У нас есть зануляющий многочлен нужной степени, значит, это то, что нам нужно.

$$\boxed{4}$$

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 + 1 &= (x^2)^2 + x^2 + 1 \\ \text{корни: } x^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} &= -\sqrt[3]{-1};\ \sqrt[3]{-1}^2 \\ x &= \left\{\pm\sqrt[3]{-1}; \pm\sqrt[3]{-1}^2\right\} \end{aligned}$$

Теперь видно, что присоединение $\sqrt[3]{-1}$ дает все корни, а степень такого расширения равна 3.